

- يتكون هذا الموضوع من أسئلة مستقلة فيما بينها وتمارين ومسألة.
- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة.

أسئلة

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة : $z^2 - 2(1+2i)z + 1 + 4i = 0$

(2) بين أن : $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = 1$

(3) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{2e^3+1}{9}$

(4) بين أن : $\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \frac{\pi}{6}$ (يمكنك وضع $t = \sqrt{x-1}$)

التمرين الأول

- نعتبر في الفضاء المسنوب إلى معلم متعامد ممنظم الفلكة S التي معادلتها $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$ والمستوى P الذي معادلته $x + y - 3 = 0$.
- (1) بين أن المستوى P مماس للفلكة S .
 - (2) حدد مثلث إحداثيات نقطة تماس P و S .

التمرين الثاني

- يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء وسبع كرات سوداء (لا يمكن التمييز بينها باللمس).
- (1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق. ليكن A و B الحدثين التاليين :
 - A : " الكرتان المسحوبتان لونهما أسود "
 - B : " من بين الكرتين المسحوبتين توجد على الأقل كرة لونها أبيض "
 بين أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{7}{15}$ وأن احتمال الحدث B يساوي $\frac{8}{15}$.
- نعتبر التجربة العشوائية التالية : نسحب كرة واحدة من الصندوق، فإذا كانت بيضاء نتوقف عن السحب وإذا كانت سوداء نضعها جانبا ثم نسحب كرة ثانية وأخيرة من الصندوق..
- ليكن C و D الحدثين التاليين :
- C : " الحصول على كرة بيضاء في السحبة الأولى "
 - D : " الحصول على كرة بيضاء "
- أ- احسب احتمال الحدث C .
- ب- بين أن احتمال الحدث D يساوي $\frac{8}{15}$.

المادة : الرياضيات

الشعبة : العلوم التجريبية – العلوم التجريبية الأصيلة – العلوم الزراعية
مسألة

الجزء الأول

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$g(x) = x - 1 - \ln x \quad \text{و} \quad h(x) = x + (x - 2) \ln x$$

(1) أ- أحسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$ ثم ادرس منحنى تغيرات الدالة g .

ب- استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$.

(2) أ- بين أن : $h(x) = 1 + g(x) + (x - 1) \ln x$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$.

ب- بين أن : $(x - 1) \ln x \geq 0$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$.

(3) استنتج أن : $h(x) > 0$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$.

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

(1) أ- احسب $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ ثم أول النتيجة مبيانيا.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ (لاحظ أن :

$$f(x) = 1 + x \ln x \cdot \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

(2) أ- بين أن $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$.

ب- استنتج أن الدالة f تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

(3) ليكن (Δ) المستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1,1)$.

أ- بين أن معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) هي $y = x$.

ب- تحقق من أن : $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$.

ج- ادرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) .

(4) أنشئ المنحنى (C) والمستقيم (Δ) في نفس المعلم. (نقبل أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف أفصولها محصور

بين 1 و 1,5).

الجزء الثالث

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = \sqrt{e}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N} .

(1) بين بالترجع أن $1 < u_n < e$ لكل n من \mathbb{N} .

(2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكنك استعمال السؤال 3 ج- من الجزء الثاني).

(3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.